Grille de correction

Exercice 1 :

Question	Consigne de correction	Barème
1.	L'univers : Card Ω (0,25 point) - Card A (0,25 point) – Calcul de P (A) (0,25 point).	0,75 point
2.a))	Définir l'événement (X =2) (0,5 point)	0,5 point
b))	Calcul de la probabilité de (X = 2) (0,75 point).	0,75 point
c))	Probabilité d'une réunion de deux événements incompatibles (0,75 point)	0,75 point
3.a))	Calcul de Card Ω (0,25 point) – Valeur de P_n (0,5 point)	1,25 point
b))	Retrouver le résultat de la question 1)) en faisnt n = 7 (0,5 point).	

Exercice 2 :

Question	Consigne de correction	Barème
1.	Représentation des nuages des points (0,25 point)	0,25 point
2.	Calcul de $\bar{x}$ (0,5 point) – Calcul de $\bar{y}$ (0,5 point) – Placer le point G (0,25 point).	1,25point
3.	Former la série des trois premiers nuages (0,25 point) – calcul de $\bar{x}_1$ (0,25 point) – Calcul de $\bar{y}_1$ (0,25 point)	2 points
	Former la série des trois derniers nuages (0,25 point) – calcul de $\bar{x}_2$ (0,25 point) – Calcul de $\bar{y}_2$ (0,25 point)	
	Equation de la droite (G_1G_2) (0,5 point)	
4.	Calcul de la valeur de y correspondant au douzième semaine (0,25 point) – Conclusion (0,25 point).	0,5 point

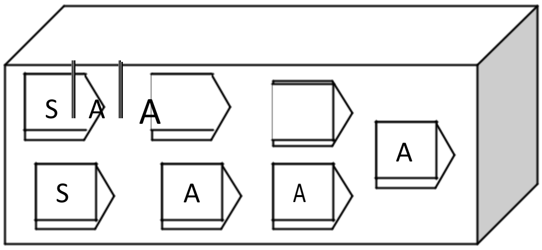
Exercice 3 :

Question	Consigne de correction	Barème
A] 1.	Une démonstration basée sur les propriétés du conjugué d'un nombre complexe. (0,25 point)	0,25 point
2.	Le calcul d'image (0, 25 point)	0,25 point
3.	Détermination d'une racine d'un trinôme connaissant l'autre racine (0,5 point). Toute fois, (0,25 point) sera attribué à l'élève qui procédera à une résolution classique.	0,5 point
B]. 1.	Les points dans le repère (0,25 point)	0,25 point
2.a))	Forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes (0,25 point)	0,25 point
b))	Justifier que le triangle est rectangle en E (0,25 point) – Justifier qu'il est isocèle (0,25 point)	0,5 point
3.	Relation d'un parallélogramme (0,25 point)	0,25 point
4.a))	Former le système (0,25 point) – Résultat demandé (0,25 point)	0,5 point
b))	Justifier que c'est une rotation (0,25 point) – valeur de l'angle (0,25 point) – centre (0,25 point)	0,75 point
c))	Image du carré (0,25 point)	0,25 point
5.	Surface d'un carré (0,25 point)	0,25 point

Problème :

Question	Consigne de correction	Barème
A]1.	U solution de (E) (0,25 point) – V solution de (E) (0,25 point)	0,5 point
2.	La fonction g solution de (E) (0,5 point).	0,5 point
3.	Calcul de g '(x) en fonction de a et b (0,25 point) – Système (0,25 point) – valeur de et b (0,5 point)	1 point
B]. 1.	Calcul de la Limite de f en – (0,25 point) – Calcul de la limite de f en + (0,25 point) – Calcul de la fonction f '(x) (0,75 point) – Sens de variation (0,25 point) – Tableau de variation (0,25 point)	1,75 point
2.	Allure de la courbe (0,5 point)	0,5 point
3.a))	H primitive de la fonction f (0,5 point)	0,5 point
b))	Calcul de la surface (0,5 point)	0,5 point
C].1. a))	V_n en fonction de n (0,5 point)	0,5 point
b))	Limite de la suite (U_n) (0,5 point)	0,5 point
2.a))	Encadrement de f sur [k ; k+1] (0,25 point) – Résultat demandé (0,25 point)	0,5 point
b))	Encadrement de V_n (0,5 point)	0,5 point
3.	Encadrement de S_n (0,5 point)	0,5 point
4.	Encadrement de la limite de la suite (S_n) (0,25 point)	0,25 point

Exercice 1 :



Carton contenant 7 téléphones.

1. Probabilité de l'événement A :

L'univers Ω de cette expérience aléatoire est tel que : Card (Ω) = A_7^2 = 42.

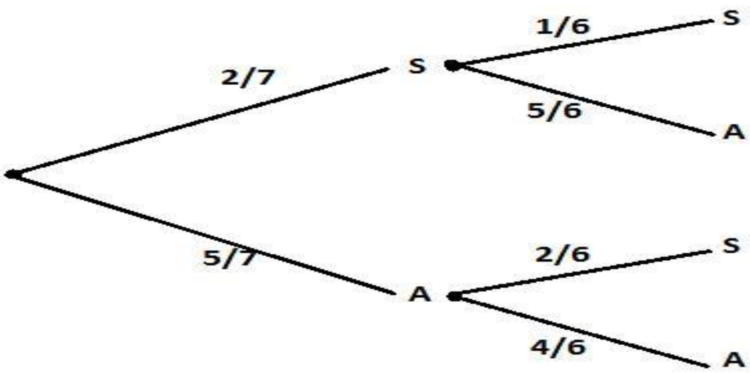
A : « obtenir deux téléphones de marques différentes ».

*Au premier tirage, tirer un téléphone de marque **Samsung** et au deuxième un téléphone de marque **ALCATEL ;** ou bien l'ordre inverse. Alors Card A = $A_2^1 \times A_5^1 + A_5^1 \times A_2^1$ = 20.*

Donc, $$P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}.$$

***Autre méthode** :*

Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



Utilisons alors le principe d'un arbre pondéré (la probabilité d'un événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet).

Alors $$P(A) = \frac{2}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{7}\times\frac{2}{6} = \frac{10+10}{42} = \frac{10}{21}.$$

2. X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux téléphones associe le nombre de téléphones de marque **Samsung** obtenu.

a. (X = 2), c'est l'événement : « Obtenir deux téléphones de Samsung ».

b. $P(X=2) = \dfrac{Card(X=2)}{Card\,\Omega} = \dfrac{A_2^2}{42} = \dfrac{2}{42} = \dfrac{1}{21}$.

Ou bien : $P(X=2) = \dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{21}$ *(principe de l'arbre pondéré).*

c. $P[(X=2)\cup A] = P(X=2) + P(A) = \dfrac{1}{21} + \dfrac{10}{21} = \dfrac{11}{21}$.

Car les deux événements sont incompatibles.

3. Maintenant, **n** téléphones dont 2 de marque **Samsung** et (n – 2) de marque **ALCATEL**.

a. Montrer que $P_n = \dfrac{4(n-2)}{}$

$$P_n = P(A) = \frac{A^1_2 \times A^1_{n-2} + A^1_{n-2} \times A^1_2}{A^2_n} = \frac{2(n-2)+2(n-2)}{n(n-1)} = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}.$$

$$D'où\ P_n = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}.$$

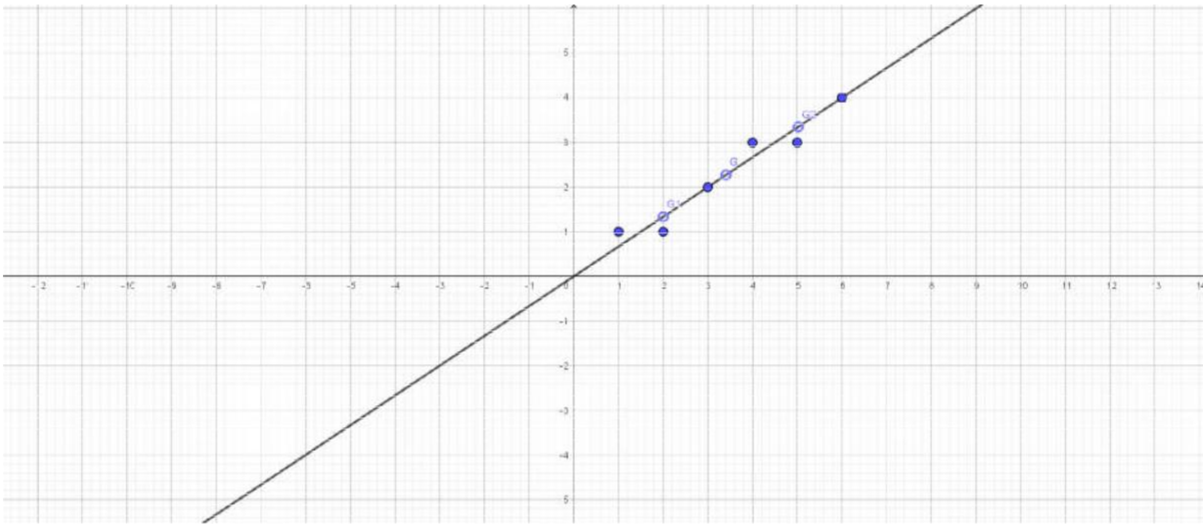
b. Le résultat de la question **1).**

D'après ce qui précède, le carton contient 7 téléphones. Donc, on prend ici n = 7.

Par conséquent, $P_7 = \frac{4(7-2)}{7(6-1)} = \frac{4 \times 5}{7 \times 6} = \frac{10}{21} = P(A).$

Exercice 2 :

1. Représentation des nuages des points.



2. Coordonnées $(\overline{x}\,;\overline{y})$ du point moyen G.

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2} \text{ et}$$

$$\overline{y} = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6}{6} = \frac{1+1+2+3+3+4}{6} = \frac{7}{3}.$$

$$D'où\ G\left(\frac{7}{2}\,;\frac{7}{3}\right).$$

Plaçons le point G : *voir figure.*

3. Equation de la droite de régression de y en x, avec la méthode de MAYER.

♣ *Série formée par les trois premiers nuages :*

Rang de la semaine : x_i	1	2	3
Nombre des cas identifiés : y_i	1	1	2

Déterminons les coordonnées $(\overline{x}_1\,;\overline{y}_1)$ *du point moyen, noté* G_1.

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{1+2+3}{3} = 2 \text{ et } \overline{y}_1 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{1+1+2}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$D'où\ G_1\left(2\,;\frac{4}{3}\right).$$

♣ *Série formée par les trois derniers nuages :*

Rang de la semaine : x_i	4	5	6
Nombre des cas identifiés : y_i	3	3	4

Déterminons les coordonnées ($\overline{x_2}$; $\overline{y_2}$) du point moyen, notéG$_2$.

$$\overline{x_2} = \frac{x_4 + x_5 + x_6}{3} = \frac{4+5+6}{3} = 5 \text{ et } \overline{y_2} = \frac{y_4 + y_5 + y_6}{3} = \frac{3+3+4}{3} = \frac{10}{3} .$$

D'où $G_2\left(5 ; \frac{10}{3}\right)$.

- *Equation de la droite (G_1G_2).*

Elle est de la forme y = a x + b ; avec $a = \frac{\overline{y_2} - \overline{y_1}}{\overline{x_2} - \overline{x_1}} = \frac{\frac{10}{3} - \frac{4}{3}}{5-2} = \frac{2}{3}$.

Obtient alors $y = \frac{2}{3}x + b$.

Puis que le point G_2 appartient à cette droite, on a : $\frac{2}{3} \times 5 + b = \frac{10}{3} \Leftrightarrow b = 0.$

- *Par conclusion, la droite (d) = (G_1G_2) de régression de y en x a pour équation* $y = \frac{2}{3}x$.

Construction de la droite (d) :

Voir figure (une droite passant par les deux points G_1 et G_2).

4. Nombre des cas de cette épidémie à la douzième semaine.

La douzième semaine de cette épidémie correspond à la valeur de x = 12.

Alors, le nombre des cas qu'on peut estimer est $y = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \times 12 = 8$.

D'où, huit cas se présenteront à la douzième semaine.

Exercice 3 :

Partie A : **Racine d'une équation du second degré à coefficient réel, dans l'ensemble des nombres complexes.**

(E), l'équation à variable complexe : $z^2 - 2z + 5 = 0$.

1. Montrons que si z_0 est une solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E).

z_0 est solution de (E) si et seulement si

$$z_0^2 - 2z_0 + 5 = 0 \Leftrightarrow \overline{z_0^2 - 2z_0 + 5} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{z_0}^2 - \overline{2} \times \overline{z_0} + 5 = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{z_0}^2 - 2\overline{z_0} + 5 = 0.$$

Alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E).

2. Vérifions que le nombre **1 – 2 i** est une racine de (E).

On a : $(1 - 2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$ et $2(1 - 2i) = 2 - 4i$.

Par consequent, $(1 - 2i)^2 - 2(1 - 2i) + 5 = -3 - 4i - 2 + 4i + 5 = -5 + 5 - 4i + 4i = 0$.

D'où le nombre complexe 1 – 2i est une racine de l'équation (E).

Autre méthode : *Utilisons le tableau de Horner :*

	1	-2	5
1 – 2 i		1 – 2 i	-5
	1	-1 – 2 i	0

D'où, 1 – 2 i est une racine de l'équation (E).

3. La deuxième racine, notée z_1, (E).

Premier méthode *: On sait bien que 1 – 2 i est racine de (E). Posons $z_0 = 1 - 2i$.*

D'après ce qui précède, $z_1 = \overline{z_0} = 1 + 2i$.

Deuxième méthode *: On sait bien que 1 – 2 i est racine de (E) une équation du second degré.*

Posons $z_0 = 1 - 2i$. Alors la deuxième racine z_1 est telle que $z_1 + z_0 = -\frac{b}{a}$; avec a = 1 et b = - 2

(somme des racines d'une équation du second degré).

Alors $z_1 + z_0 = -\frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow z_1 = 2 - z_0 = 2 - (1 - 2i) = 2 - 1 + 2i = 1 + 2i$.

Troisième méthode *: On sait bien que 1 – 2 i est racine de (E) une équation du second degré.*

Posons $z_0 = 1 - 2i$. Alors la deuxième racine z_1 est telle que $z_1 \times z_0 = \frac{c}{a}$; avec a = 1 et c = 5

(produit des racines d'une équation du second degré).

Alors $z_1 \times z_0 = \frac{c}{a} = 5 \Leftrightarrow z_1 = \frac{5}{z_0} = \frac{5}{1-2i} = \frac{5(1+2i)}{1^2+2^2} = \frac{5(1+2i)}{5} = 1 + 2i$.

Quatrième méthode *:*

à l'aide du tableau de Horner, l'équation (E) $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i) = 0$

$\Leftrightarrow z - 1 + 2i = 0$ ou $z - 1 - 2i = 0$ $z = 1 - 2i$ ou $z = 1 + 2i$.

D'où, z1 = 1 + 2 i la deuxième racine de l'équation (E).

Cinquième méthode *: (résolution classique d'une équation du second degré)*

$z^2 - 2z + 5 = 0$. On a : $\Delta = b^2 - 4ac$; avec a = 1, b = - 2 et c = 5.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

Alors les deux racines sont : $z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$ et $z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$.

D'où $z_1 = 1 + 2i$.

Remarque :

La quatrième méthode ne répond pas l'objectif visé de la question (comment en déduire une racine d'une équation du second degré connaissant l'autre). D'où un cas à ne pas tenir compte.

Toute fois, une petite appréciation sera donnée à l'élève qui utilisera cette méthode.

Partie B : **Complexe et géométrie**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$),
on donne les points E (z_E = **3)**, B (z_B = **1 – 2i)** et P (z_P =**1 + 2i)**.

1. Les points dans le repère (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) : *voir figure fin de l'exercice*.

2. a)) Le nombre complexe $\dfrac{z_B - z_E}{z_P - z_E}$ sous forme algébrique.

$$\frac{z_B - z_E}{z_P - z_E} = \frac{1 - 2i - 3}{1 + 2i - 3} = \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i} = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{1^2 + 1^2} = i.$$

b)) En déduire la nature du triangle BEP.

Puis que le nombre complexe $\dfrac{z_B - z_E}{z_P - z_E}$ *= i est un nombre complexe imaginaire pur, alors le triangle BEP est rectangle en E.*

Et de plus, $\left|\dfrac{z_B - z_E}{z_P - z_E}\right| = \dfrac{BE}{PE} = |i| = 1$*, le triangle BEP est aussi isocèle.*

D'où le triangle BEP est iso - rectangle en E.

***Autre démarche** :*

Puis que le nombre complexe $\dfrac{z_B - z_E}{z_P - z_E}$ *= i est un nombre complexe imaginaire pur, alors le triangle BEP est rectangle en E.*

D'autre part, on a : BE $= |z_E - z_B| = |3 - 1 + 2i| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ *et*

PE $= |z_E - z_P| = |3 - 1 - 2i| = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ *.*

Alors, BE = PE ; le triangle BEP est aussi isocèle.

D'où, le triangle BEP est un triangle iso-rectangle en E.

3. L'affixe du point C pour que le quadrilatère BEPC soit un carré.

Le quadrilatère BEPC est un carré si et seulement si $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CP}$

$\Leftrightarrow z_E - z_B = z_P - z_C \Leftrightarrow z_C = z_P + z_B - z_E = 1 + 2i + 1 - 2i - 3 = -1$. *D'où* $z_C = -1$.

4. S la similitude plane directe tel que S (E) = B et S (B) = C.

a)) Ecriture complexe de S.

D'une manière générale, l'écriture complexe d'une similitude plane directe est de la forme :

z' = a' z + b' ; où a' et b' des nombres complexes à déterminer.

Par hypothèse :

- ❖ *S (E) = B* $\Leftrightarrow z_B = a' z_E + b' \Leftrightarrow 3a' + b' = 1 - 2i$
- ❖ *S (B) = C* $\Leftrightarrow z_C = a' z_B + b' \Leftrightarrow (1 - 2i)a' + b' = -1.$

On obtient le système : $\begin{cases} 3a' + b' = 1 - 2i \\ (1 - 2i)a' + b' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -i \\ b' = 1 + i \end{cases}$

D'où l'écriture complexe de la similitude S est : z' = – i z + 1 + i.

b)) Les éléments caractéristiques de S.

On a $|a'| = |-i| = 1$ *; dons S est une rotation d'angle* α *= arg (a') = arg (- i) =* $-\dfrac{\pi}{2}$ *et de centre le point D d'affixe* $z_D = \dfrac{b'}{1 - a'} = \dfrac{1 + i}{1 + i} = 1.$

c)) Image, par la similitude S, du carré BEPC.

On sait bien que : S (E) = B et S (B) = C.

Notons par : P' = S (P), C' = S (C) .

- *S (P) = P'* $\Leftrightarrow z_{P'} = -i\, z_P + 1+i = -\, i\,(1+ 2i) + 1 + i = 3$
  $= z_E$ *D'où S (P) = E.*
- *S (C) = C'* $\Leftrightarrow z_{C'} = -\, i\, z_C + 1+i = -\, i(-1) + 1 + i = 1 + 2\, i$
  $= z_p$. *D'où S (C) = P.*

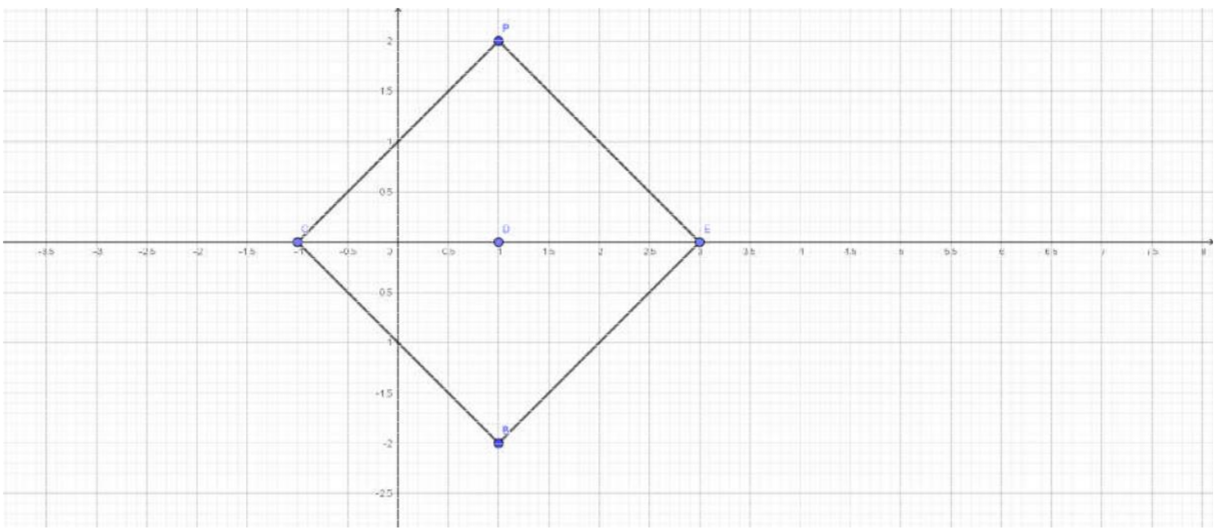
Il en résulte que : S (B) = C, S (E) = B , S (P) = E et S (C) = P.

Par conclusion, l'image du carré BEPC est le carré CBEP.

5. La surface du quadrilatère BEPC.

Surface d'un carré est égal à côté fois côté = BE² = $|z_B - z_E|^2 = |1 - 2i - 3|^2 = |-2 - 2i|^2 = 8$ *cm².*

figure :



Problème :

Partie A : **Résolution d'une équation différentielle**.

(E), l'équation différentielle : y '' + y' – 2 y = = 0

1. U (x) = e^{-2x} et V (x) = e^{x} , sont des solutions de l'équation différentielle (E).
   - *La fonction U est une solution de (E) si et seulement si U'' (x) + U' (x) – 2 U (x) = 0.*

     On a : $U(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow U\,'(x) = -\, 2\, e^{-2x}$ *et* $U''(x) = 4\, e^{-2x}$.

     Alors, $U''(x) + U'(x) - 2\, U(x) = 4\, e^{-2x} - 2\, e^{-2x} - 2\, e^{-2x} = 4\, e^{-2x} - 4\, e^{-2x} = 0.$

     D'où, la fonction U est solution de l'équation (E).
   - *La fonction V est une solution de (E) si et seulement si V'' (x) + V' (x) – 2 V (x) = 0.*

     On a : $V(x) = e^{x} \Leftrightarrow V'(x) = e^{x} \Leftrightarrow V''(x) = e^{x}$.

     Alors, $V''(x) + V'(x) - 2\, V(x) = e^{x} + e^{x} - 2\, e^{x} = 2\, e^{x} - 2\, e^{x} = 0.$

     D'où, la fonction V est solution de l'équation (E).

   ***Conclusion** : les fonctions U et V sont des solutions de l'équation différentielle (E).*
2. Montrons que, g (x) = a U (x) + b V (x), est solution de(E).

g est solution de (E) si et seulement si g'' + g' – 2 g = 0.

Puis que g (x) = a U (x) + b V (x), avec a et b des constantes réelles, on a : g ' (x) = a U ' (x) + b V' (x) et g '' (x) = a U'' (x) + b V'' (x).

Alors, g'' + g' – 2 g = a U'' (x) + b V'' (x) + a U ' (x) + b V' (x) – 2 [a U (x) + b V (x)]

= a [U'' (x) + U '(x) - 2 U (x)] + b [V''(x) + V' (x) -2 V (x)] . Or, d'après la question 1)), on a :

U'' (x) + U '(x) - 2 U (x)= 0 et V''(x) + V' (x) -2 V (x) = 0.

Il en résulte que g'' + g'– 2 g = a [U''(x)+ U'(x)- 2 U (x)] + b [V''(x)+ V'(x) -2V(x)= 0.

D'où, g est solution de l'équation (E).

***Autre démarche** :*

D'après la question 1)), U''(x) + U '(x) - 2 U (x)= 0 et V''(x) + V' (x) -2 V (x) = 0.

Alors, pour tout réel a et b, on a : $\begin{cases} a(U''+U'-2U)=0 & \S \\ b(V''+V'-2V)=0 & \S\S \end{cases}$.

A l'aide de § et §§ (en faisant § +§§), on obtient :

a U'' + b V'' + a U' + b V' – 2 (a U – b V)= 0 ⇔ g'' + g' – 2 g = 0.

D'où, g est solution de l'équation (E).

3. L'unique solution g, de (E) vérifiant : g(0) = 1 et g'(0) = - 2. *g (x) = a U (x) + b V (x), avec a et b des constantes réelles.*

Avec U(x) = e^{-2x} *et V (x) =* e^{x} *, alors g (x) = a* e^{-2x} *+ b* e^{x} *et g ' (x) = -2a* e^{-2x}*+ b* e^{x}*.*

g (0) = a e^{0} *+ b* e^{0} *= a + b et g ' (0) = - 2 a* e^{0} *+ b* e^{0}*= - 2 a + b.*

On obtient e système : $\begin{cases} a+b=1 \\ -2a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=3 \\ 3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$.

D'où, g (x) = e^{-2x} *.*

Partie B : **Etude d'une fonction**

f (x) = (1 + 2 x) e^{-2x}. (C_f) courbe de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Dresser le tableau de variation de f.

Fonction dérivée :

f ' (x) = [(1 + 2 x) e^{-2x}]' = (1 + 2 x)' e^{-2x}+ (1 + 2 x) [e^{-2x}]'

= 2 e^{-2x}– 2 (1 + 2 x) e^{-2x} = – 4x e^{-2x}. *D'où f ' (x) =* – 4x e^{-2x}.

Sens de variation :

Tableau de signe de la fonction dérivée.

x	- ∞		*0*		+ ∞
-4x		+	*0*	-	
e^{-2x}		+		+	
f' (x)		+	*0*	-	

Pour tout réel x de l'intervalle]- ∞ ; 0], f ' (x) 0, alors f est croissante.

Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; + ∞ [, f ' (x) 0 , alors f est décroissante .

***Limites** :*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[(1+2x)e^{-2x}\right] = (-\infty)\times(+\infty) = -\infty\ ;$$

$$car,\ \lim_{x\to-\infty}(1+2x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty\ .$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(1+2x)e^{-2x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-2x} + 2xe^{-2x}\right) = 0+0 = 0\ ;$$

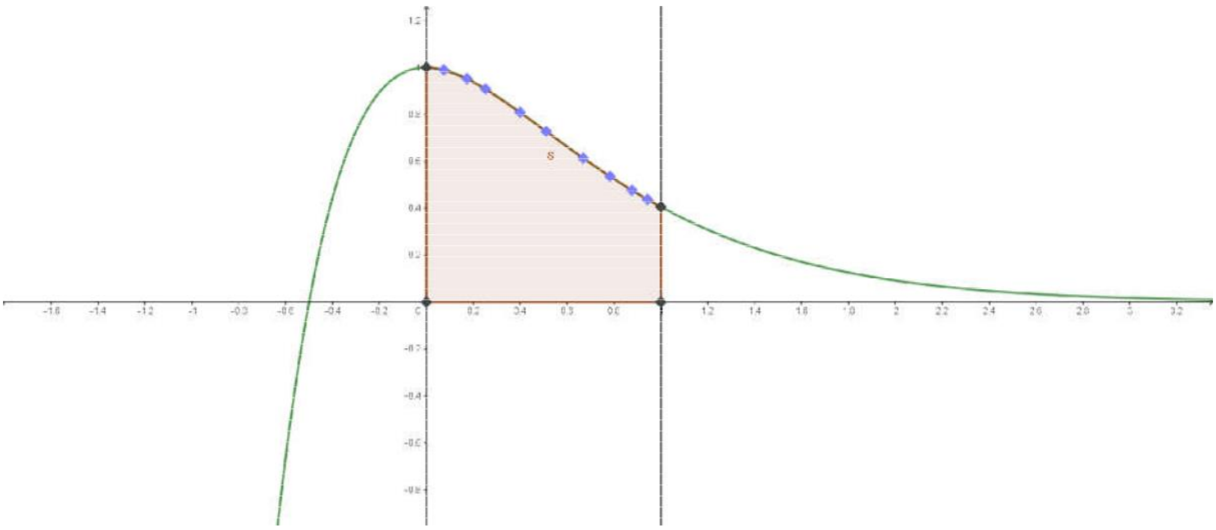
$$car,\ \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} 2xe^{-2x} = 0\ .$$

***Conclusion** :*

On obtient alors comme tableau de variation de f :

x	- ∞		0		+ ∞
f' (x)		+	0	-	
f(x)	- ∞	↗	*f (0) = 1*	↘	0

2. Allure de la courbe représentative de f :



3. a)) Montrons que H (x) = (– x – 1) e^{-2x} est une primitive de f sur IR.

La fonction H est dérivable sur IR comme produit de deux fonctions dérivables ; et de plus, pour tout réel x, on a :

$H'(x) = [(-x-1)e^{-2x}]' = (-x-1)'e^{-2x} + (-x-1)(e^{-2x})' = -e^{-2x} - 2(-x-1)e^{-2x} = (-1+2x+2)e^{-2x} = (1+2x)e^{-2x} = f(x)$.

D'où, H est dérivable sur IR et pour tout réel x, H ' (x) = f (x).

La fonction H est alors une primitive de la fonction f sur IR.

b)) Calcul de surface.

On note par S, la surface du domaine du plan limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1 (voir figure).

$$S = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| UA\ ;\ \text{avec } UA = 1\ cm^2.$$

$$\int_0^1 f(x)dx = [H(x)]_0^1 = H(1) - H(0) = -2e^{-2} + 1.$$

D'où, $S = (1 - 2e^{-2})\ cm^2$.

Partie C : **Etude d'une suite.**

(V_n) et (S_n) suites définies par :

$V_n = \int_0^n f(x)dx$ et $S_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$; pour tout entier n.

1. a)) Montrons que, pour tout entier naturel n, on a : $V_n = 1 - (n+1)e^{-2n}$.

On a : $V_n = \int_0^n f(x)dx = [H(x)]_0^n = H(n) - H(0) = (-n-1)e^{-2n} + 1 = 1 - (n+1)e^{-2n}$.

D'où , pour tout entier naturel n, on a : $V_n = 1 - (n+1)e^{-2n}$.

b)) La limite de la suite (V_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[1-(n+1)e^{-2n}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - ne^{-2n} - e^{-2n}\right) = 1 - 0 - 0 = 1$;

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-2n} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$.

2. a)) Montrons qu' on a : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$.

D'après B]1)), f est décroissante sur l'intervalle [0 ; + ∞ [. Alors pour tout entier naturel k, f est décroissante sur [k ; k + 1].

Donc, pour x de $[k ; k+1] \Leftrightarrow k \leq x \leq k+1 \Leftrightarrow f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

D'après l'inégalité de la moyenne, on a : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$.

b)) En déduisons que : $S_n - f(0) \leq V_n \leq S_n - f(n)$.

On sait bien que, ∀ *l'entier k, avec* $0 \leq k \leq n-1$*, on a :* $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$.

Alors, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k)$. ***(I)***

Or, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k+1) = \sum\limits_{k+1}^{n} f(k)$ *et* $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_0^n f(x)dx$ *(relation de Chasles).*

Donc, la relation (I) , $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k)$ *devient :*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) .$$

D'autre part, on a :

$S_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \Leftrightarrow S_n - f(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$,

$S_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = f(n) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k) \Leftrightarrow S_n - f(n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k)$ .et

$$V_n = \int_0^n f(x)dx .$$

Il en résulte que, $\sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \int_0^{n} f(x)dx \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \quad S_n - f(0) \quad V_n \quad S_n - f(n).$

3. Pour tout entier naturel n : $V_n + (1 + 2n)\, e^{-2n} \quad S_n \quad 1 + V_n$.

   D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n, $S_n - f(0) \quad V_n \quad S_n - f(n)$;

   on en déduit que, $- f(0) \quad V_n - S_n \quad - f(n)$ - $V_n - f(0) \quad - S_n \quad - V_n - f(n)$

   $V_n + f(n) \quad S_n \quad V_n + f(0).$

   Or, $f(0) = 1$ *et* $f(n) = (1 + 2n)\, e^{-2n}$. *D'où* $V_n + (1 + 2n)\, e^{-2n} \quad S_n \quad 1 + V_n$.

4. On admet que : $\lim_{n \to +} S_n = L$.

   Pour tout entier naturel n, $V_n + (1 + 2n)\, e^{-2n} S_n \quad 1 + V_n$.

   de plus $\lim_{n \to +} V_n = = 1$ *et* $\lim_{n \to +} (n + 1)e^{-2n} = \lim_{n \to +} \left(ne^{-2n} + e^{-2n}\right) = 0.$

   Alors, d'après les critères de comparaisons, on a : $1 \quad L \quad 1 + 1 \quad 1 \quad L \quad 2.$

Association des Etudiants de Mdjankagnoi A.E.M - https://aem-20.webself.net/