Corrigé : Maths		Examen : Baccalauréat							
		Session : 2017							
	Série :	A1	A2	A4	C	D	G	Stc	Sti
	Coeff. :					4			
Nbr pages :	Durée :					4			

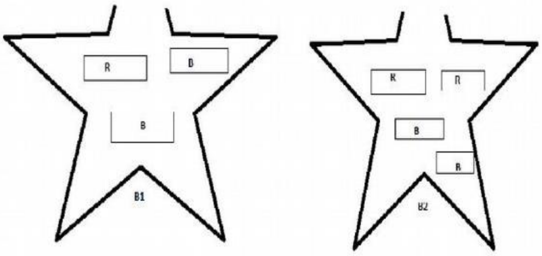
Tous les sujets et corrigés des BAC Comoriens sur le site de l'AEM Mdjankagnoi
https://aem-20.webself.net/

Série D

Exercice 1 :

Partie A : Probabilité

Des gommes identiques dans deux boites.



1. Obtenir une seule gomme rouge signifie qu'on a choisi la boite B_1 et on a tiré une gomme rouge ou bien on a choisi la boite B_2 et on a tiré une gomme rouge.

$$\text{Alors } P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_3^2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{2\times 3} + \frac{2\times 2}{2\times 6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

D'où le résultat $P(A) = \frac{2}{3}$.

2. C'est la probabilité de B_2 sachant que l'événement A est réalisé.

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_4^2}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

3. L'expérience qui consiste à répéter le jeu précédent 4 fois de suites et de manières indépendantes. succès l'événement « Obtenir une seule gomme rouge » ; probabilité d'un succès $p = P(A) = \frac{2}{3}$ et probabilité d'un échec $q = 1 - p = \frac{1}{3}$.

Par conséquent la probabilité de réaliser 3 succès au cours de ses 4 essaies est égale à :

$$C_4^3 p^3 q^{4-3} = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{32}{81} \approx 0{,}39.$$

Partie B : Statistique.

1. Coordonnées du point moyen G.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{N} = \frac{88+65+59+25+58}{5} = 59 \text{ et } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{N} = \frac{43+22+56+23+54}{N} = 39{,}6.$$

D'où G (59 ; 39,6).

2. Equation de la droite de régression de y en x par la méthode de moindre carré.

Cette droite a pour équation réduite : $y = ax + b$; avec $a = \frac{Cov(x,y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

s

$$Cov(x,y)=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i}{N}-\bar{x}\times\bar{y}=\frac{88\times43+65\times22+59\times56+25\times23+58\times54}{5}-59\times39,6=10$$

$$V(x)=\frac{\sum_{i=1}^{5}n_ix_i^2}{N}-\bar{x}^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i^2}{N}-\bar{x}^2=\frac{88^2+65^2+59^2+25^2+58^2}{5}-59^2\approx 406,8.$$ On obtient

$$a=\frac{Cov(x,y)}{V(x)}=\frac{108,6}{406,8}\approx 0,27 \text{ et } b=\bar{y}-a\,\bar{x}.=39,6-0,27\times 59\approx 23,67.$$

D'où le résultat : y **= 0,27** x **+ 23,67**.

3. a) En supposant la conformité de cette tendance, pour cette session 2017, avec 54 élèves présentés, signifie que $x = 54$. Alors, avec le résultat de la droite d'ajustement y **= 0,27** x **+ 23,67**, l'estimation des admis est $y = 0,27\times 54 + 23,67 \approx 38,25$.

D'où presque **38** élèves seront admis.

b) Un réussite de 100 %, signifie que tout les élèves qui seront présentés vont réussir l'examen.

On a la relation $x = y$.

Par conséquent la relation y **= 0,27** x **+ 23,67** devient x **= 0,27** x **+ 23,67**.

D'où $$x=\frac{23,67}{1-0,27}\approx 32,28.$$

On peut conclure que cette classe doit avoir un effectif de **32** élèves.

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on donne les points A, B et C tel que :

$z_A = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_C = -1$. (d) la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$

1. a) On a : $z_C-z_A=-1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_C-z_B=-1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alors $$\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}=\frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{4}=\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{2^2}=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

D'où $$\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

b) Module : $$\left|\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\right|=\left|\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right|=\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\right)^2=1.$$

Argument : $$Arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\right)=Arg\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2\,Arg\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

D'autre part ; on a : $\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$ et soit α le réel tel que : $\begin{cases}Cos\alpha=-\frac{1}{2}\\ Sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

On prend $\alpha=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$. Alors $Arg\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

On obtient $Arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\right)=2\,Arg\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\times\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}[2\pi]$.

c)On sait bien que : $\left|\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\right|=\frac{CB}{CA}$ et $Arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\right)=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

On en déduit que : $\left|\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\right|=\frac{CB}{CA}=1$ et $Arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\right)=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{4\pi}{3}$.

Le triangle ABC est alors isocèle.

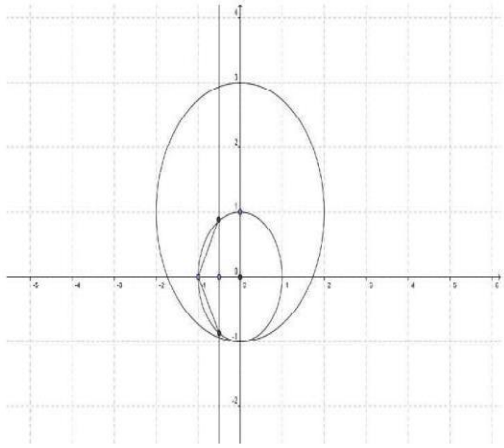
2. a) OA = $|z_A|=\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$; OB = $|z_B|=\left|-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$;

OC = $|z_C|=|-1|=1$. On remarque que OA =OB = OC =1.

Ce qui prouve que les points A,B et C appartiennent au cercle (Γ) de centre O et de rayon r = 1.

3. b) Figure.

$z_A = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors $x_A=x_B=-\frac{1}{2}$. On en déduit que les points A et B appartiennent à la droite (d). Et de plus A et B appartiennent au cercle (Γ). Finalement A et B sont les deux points d'intersections de (d) et (Γ) dont A celui d'ordonné positif et B d'ordonné négatif .



4. **S** la transformation d'écriture complexe $z' = (1 + i\sqrt{3})z + i$.

a) Cet écriture complexe est de la forme $z' = az + b$; avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = i$.

On a : $|a| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ et posons $\beta = Arg(a)$. $\begin{cases} Cos\beta = \frac{1}{2} \\ Sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$.

La transformation S est une similitude plane directe de rapport k = 2, d'angle $\beta = \frac{\pi}{3}$

et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-1-i\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $S(O) = D \Leftrightarrow z_D = (1+i\sqrt{3})z_O + i = i$.

c) S, est une similitude plane directe ; (Γ) le cercle de centre O et de rayon r = 1 ; S(Γ) = (Γ'). Alors (Γ') est un cercle de centre S(O) = D et de rayon r' = k r = 2.

(Voir figure).

Problème :

Partie I : Etude de la continuité et la dérivabilité d'une fonction.

f définie sur l' IR par : $\begin{cases} f(x) = e^{x-1} - x + 1 \quad si \quad x \in]-\infty; 1] \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} \quad si \quad x \in]1; +\infty[\end{cases}$

1. La fonction f est continue au point $x_0 = 1$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x)$.

Calculons les limites :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} (e^{x-1} - x + 1) = e^0 - 1 + 1 = 1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1 + \frac{\ln 1}{1} = 1 + 0 = 1.$

Alors $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. D'où f est continue au point $x_0 = 1$.

2. **Etude de la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$.**

a. En posant $t = x - 1$, on a, pour tout $x \leq 1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{e^{x-1}-x+1-1}{x-1} = \frac{e^{x-1}-(x-1)-1}{x-1} = \frac{e^t - t - 1}{t} = \frac{e^t-1}{t} - \frac{t}{t} = \frac{e^t-1}{t} - 1.$$

b. Avec $t = x - 1$, alors, si $x \to 1$ on a : $t \to 0$. Par conséquent

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} \left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{e^t-1}{t} - 1\right) = 1 - 1 = 0 \text{ ; car } \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{e^t-1}{t}\right) = 1.$$

c. $$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+\frac{\ln x}{x} - 1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x-1}\right) = 1 \times 1 = 1; \text{ car } \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1.$$

d. A l'aide des résultats de la question 2)) a) b), on dit que la fonction f est dérivable à gauche de $x_0 = 1$ et $f_g'(1) = 0$; d'autre part elle est aussi dérivable à droite de $x_0 = 1$ et $f_d'(1) = 1$. Puisque $f_g'(1) \neq f_d'(1)$, alors la fonction f n'est pas dérivable au point $x_0 = 1$.

Partie II : **Etude d'une fonction.**

H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $H(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

1. a) $H'(x) = \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{x(\ln x)' - (x)'\ln x}{x^2} = \frac{x\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

D'où, pour tout réel $x > 0$, on a : $H'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

b) Pour tout réel $x > 0$, on a : $x^2 > 0$. Le signe de $H'(x)$ dépend de l'expression $1 - \ln x$.

- ✓ $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e \Leftrightarrow x \in]0; e]$.
- ✓ On en déduit que, pour tout réel x de $[e; +\infty[$, on a : $1 - \ln x \leq 0$.

Par conclusion, pour tout réel x de $]0; e]$, $H'(x) \geq 0$; la fonction H est alors croissante sur cet intervalle. Et dans l'intervalle $[e; +\infty[$, $H'(x)$ 0 ; la fonction H est alors décroissante sur cet intervalle.

c) Calculons tout d'abord les limites de H aux bornes.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} H(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \left(1 + \frac{1}{x}\ln x\right) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$; car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \ln x = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +} H(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1 + 0 = 1$; car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

D'où le tableau de variation de la fonction H.

x	0		e		+∞
H'(x)	‖	+	0	-	
H(x)	‖ -∞	↗	$1+e^{-1}$	↘	1

2. La tangente (T) à (C_H) au point d'abscisse $x_1 = 1$, a pour équation réduite :

$y = H'(1)(x-1) + H(1)$; avec $H'(1) = 1$ et $H(1) = 1$.

D'où $y = x$.

3. Allure de la courbe.