Corrigé : *Maths*		Examen : ***Baccalauréat***							
		Session : ***2017***							
	Série :	A1	A2	A4	C	D	G	Stc	Sti
	Coeff. :				5				
Nbr pages :	Durée :				4				

d. On sait bien que, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$, et que pour tout entier naturel n $|V_n - \alpha| \le \left(\frac{5}{12}\right)^n$

, alors d'après les critères de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \alpha$.

4. V_n valeur approchée du nombre réel α à 10^{-1} près si et seulement si,

$$|V_n - \alpha| \le 10^{-1} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{12}\right)^n \le 10^{-1} \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln(10^{-1})}{\ln\left(\frac{5}{12}\right)} \Leftrightarrow n \ge 2{,}63.$$

D'où $n \in \{3, 4, 5, \dots, \text{ect}\}$. On prend alors $n = 3$.

Série C

Exercice 1 :

Partie A : arithmétique

1. Montrons que **6** divise l'entier naturel $2\times 3437^{1325} + 4694$.

Désignons par : $a = 3437^{1325}$ et $b = 4694$. On a :

- $3437 = 6(572) + 5$; alors $3437 \equiv 5[6] \Leftrightarrow 3437^2 \equiv 5^2[6]$.

Or $5^2 \equiv 1[6]$; donc $3437^2 \equiv 1[6]$.

Par conséquent, $\forall p \in \mathbb{N}, 3437^{2p} \equiv 1[6]$. **(μ)**

D'autre part, $1325 = 2(662) + 1$; on peut écrire : $3437^{1325} = 3437^{2(662)} \times 3437$.

La relation **(μ)**, en prenant $p = 662$, devient :

$3437^{2(662)} \equiv 1[6] \Leftrightarrow 3437^{2(662)} \times 3437 \equiv 3437[6] \Leftrightarrow 3437^{1325} \equiv 3437[6] \Leftrightarrow a \equiv 3437[6]$.

Puisque $3437 \equiv 5[6]$, alors $a \equiv 5[6] \Leftrightarrow 2a \equiv 10[6]$ et que $10 \equiv 4[6]$;

on obtient $2a \equiv 4[6]$. **(μμ)**.

- $4694 = 6(782) + 2 \Leftrightarrow b \equiv 2[6]$. (€).

Finalement, à l'aide de la relation **(μμ) et** (€), $2a + b \equiv 6[6]$ et que $6 \equiv 0[6]$.

D'où $2a + b \equiv 0[6]$; plus précisément $2\times 3437^{1325} + 4694 \equiv 0[6]$.

Ce qui prouve que 6 divise l'entier naturel $2\times 3437^{1325} + 4694$.

2. Déterminons l'entier naturel x tel que : $\overline{34}^x \times \overline{16}^x = \overline{643}^x$.

On sait bien que : $\overline{34}^x = 3x + 4$; $\overline{16}^x = x + 6$ et $\overline{643}^x = 6x^2 + 4x + 3$.

L'égalité $\overline{34}^x \times \overline{16}^x = \overline{643}^x$ devient $(3x+4)(x+6) = 6x^2 + 4x + 3$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 22x + 24 = 6x^2 + 4x + 3 \Leftrightarrow -3x^2 + 18x + 21 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 7$.

Comme x est un entier naturel, alors on prend $x = 7$.

3. (E), l'équation d'inconnu x et y, dans $\mathbb{Z}^2$: $11x + 17y = 5$.

a. Pour $x = -15$ et $y = 10$, on a : $11(-15) + 17(10) = -165 + 170 = 5$.

Le couple $(x_0 = -15 ; y_0 = 10)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b. Soit $(x ; y)$ une solution quelconque de (E) :

$$\begin{cases} 11x + 17y = 5 & (1) \\ 11x_0 + 17y_0 = 5 & (2) \end{cases};$$

$(1) - (2)$ donne $11(x - x_0) + 17(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 11(x - x_0) = -17(y - y_0)$;

alors 11 divise $-17(y - y_0)$ et que 11 et 17 sont deux entier premier entre eux ;

d'après Gauss 11 divise $-(y - y_0)$. On peut trouver un entier relatif k tel que

$-(y - y_0) = 11k \Leftrightarrow y - y_0 = -11k \Leftrightarrow y = y_0 - 11k = 10 - 11k$.

Avec $11(x - x_0) = -17(y - y_0) \Leftrightarrow 11(x - x_0) = 17(11k)$

$\Leftrightarrow x - x_0 = 17k \Leftrightarrow x = x_0 + 17k = -15 + 17k$.

D'où, l'équation (E) admet comme ensemble de solution :

$S = \{(x ; y)\} = \{(-15 + 17k ; 10 - 11k) ;$ avec k entier relatif$\}$.

4. Déterminons le plus petit entier naturel n vérifiant : $\begin{cases} n \equiv 7 \ [11] \\ n \equiv 2 \ [17] \end{cases}$.

Soit n tel que :

- $n \equiv 7[11]$; $\exists$ p entier relatif tel que $n = 11p + 7$ **(I)**
- $n \equiv 2[17]$; $\exists$ un entier relatif q tel que $n = 17q + 2$ **(II)**

A l'aide des relations (I) et (II), on obtient $11p + 7 = 17q + 2 \Leftrightarrow 11p - 17q = -5$

$\Leftrightarrow -11p + 17q = 5 \Leftrightarrow 11(-p) + 17q = 5$.

On en déduit que le couple $(-p ; q)$ est solution de l'équation (E).

D'après 2) b), on a : $-p = -15 + 17k$ et $q = 10 - 11k \Leftrightarrow p = 15 - 17k$ et $q = 10 - 11k$.

Finalement, $n = n = 11p + 7 = 11(15 - 17k) + 17 = 172 - 187k$; avec $k \in \mathbb{Z}$

Avec n le plus petit entier naturel, on prend alors $k = 0$. D'où $n = 172$.

Partie B : Géométrie dans l'espace.

L'espace de repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$; (P) est le plan d'équation

$x + y + z - 3 = 0$ et (d) la droite passant par le point $A(0 ; 3, 0)$ de vecteur directeur $\vec{U} = \vec{j} - \vec{k}$.

1. **Montrons que la droite (d) est contenue dans le plan (P).**

Notons $\vec{n}(1 ; 1 ; 1)$ le vecteur normal du plan (P).

✓ $\vec{n}\cdot\vec{U} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 + 1 - 1 = 0$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{U}$ sont orthogonaux.

Alors la droite (d) est parallèle au plan (P).

✓ Pour $x = 0$, $y = 3$ et $z = 0$, on a : $x + y + z - 3 = 0 + 3 + 0 - 3 = 0$;

Alors le point $A(0 ; 3, 0)$ appartient au plan (P).

Par conclusion :

la droite (d) est parallèle au plan (P) et de plus (d) et (P) ont un point commun A.

Alors la droite (d) est contenue dans le plan (P).

2. Equation cartésienne du plan (Q).

Le plan (Q) est parallèle au plan (P) ; alors le vecteur $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal du plan (Q). Par conséquent, puis que le point O appartient à (Q), pour tout point M (x ; y ; z) de (Q) on a :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow x+y+z=0.$$

D'où le plan (Q) a pour équation cartésienne $x+y+z=0$.

Autre méthode :

Le vecteur $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 1) est un vecteur normal du plan (P) ; alors l'équation est de la forme $x+y+z+d=0$. Puis que le point O appartient à (Q) on a :

$$0+0+0+d=0 \Leftrightarrow d=0.$$

D'où le plan (Q) a pour équation cartésienne $x+y+z=0$.

3. B le projeté orthogonal du point A sur le plan (Q).

a. coordonnées du point B.

- Equation paramétrique de la droite (AB).

La droite (AB) est perpendiculaire au plan (Q) ;

alors le vecteur $\vec{n}$ est vecteur directeur de la droite (AB).

Pour tout point M (x ; y ; z) de la droite (AB), il existe un réel t

$$\text{tel que : } \begin{cases} x=t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

- $B\,(x_B\,;y_B\,;z_B) = (AB)\cap(Q)$.

$$\text{On a : } \begin{cases} x_B=t \\ y_B=3+t \\ z_B=t \\ x_B+y_B+z_B=0 \end{cases} \Leftrightarrow t+3+t+t=0 \Leftrightarrow t=-1.$$

D'où $B(-1\,;2\,;-1)$.

b. Distance entre les droites (d) et (OB).

La droite (OB) appartient au plan (Q) et la droite (d) est dans le plan (P) ; puisque les plans (P) et (Q) sont parallèles, alors les droites (d) et (OB) sont aussi parallèles.

D'autre part, la droite (AB) est perpendiculaire à la fois aux droites (OB) et (d). Finalement, la distance entre les droites (OB) et (d) est la distance AB.

D'où la distance entre les droites (d) et (OB),

$$AB=\sqrt{(-1)^2+(2-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}.$$

Autre méthode :

La distance entre les droites (d) et (OB) est égale à : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U}\right\|}{\left\|\vec{U}\right\|}$.

On a : $\overrightarrow{AB}(-1;-1;-1)$, $\vec{U}(0;1;-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\vec{U}(2;-1;-1)$.

On obtient : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U}\right\|}{\left\|\vec{U}\right\|}=\dfrac{\sqrt{4+1+1}}{\sqrt{0+1+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$.

Autre méthode :

La distance entre les droites (d) et (OB) est égale à : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}$.

On a : $\overrightarrow{AB}(-1;-1;-1)$, $\overrightarrow{OB}(-1;2;-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OB}(3;0;-3)$.

On obtient : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=\dfrac{\sqrt{9+0+9}}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

4. La surface du triangle OBA.

On note par S la surface du triangle OBA.

On sait bien que la droite (AB) et la droite (OB) sont perpendiculaire ; alors le triangle OBA est rectangle en B. Donc $S=\dfrac{AB\times OB}{2}\ cm^2$.

Avec $AB=\sqrt{3}$ et $OB=\sqrt{6}$, on obtient : $S=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ cm^2$.

Autre méthode :

$$S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|\ cm^2\,;$$

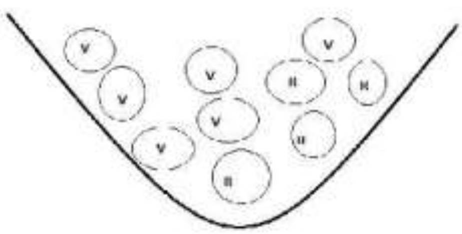
Avec $\overrightarrow{OA}(0;3;0)$, $\overrightarrow{OB}(-1;2;-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(-3;0;-3)$.

On obtient le résultat : $S=\dfrac{\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|}{2}=\dfrac{\sqrt{9+0+9}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ cm^2$.

Exercice 2 : « 5 points »

Partie I : Probabilité

Le sac contenant les 10 pommes (4 rouges et 6 vertes) indiscernables au toucher.



On tire au hasard et simultanément 3 pommes.

1. Nombre de tirages possibles : $C_{10}^{3} = 120$.

2. Probabilité de l'événement A : $P(A) = \dfrac{C_4^2 \times C_6^1}{120} = 0{,}3$.

3. X variable aléatoire qui, associe le nombre de pommes rouges obtenues.

   a. Loi de probabilité de la variable aléatoire X.

      - Valeurs prises de X : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
      - Loi de probabilité :

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{1}{6}; \qquad P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{120} = \frac{1}{2};$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{120} = \frac{3}{10}; \qquad P(X=3) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{1}{30}.$$

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

   b. Espérance mathématique de la variable aléatoire X.

$$E(X) = \sum_{i=0}^{4} x_i P_i = 0\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{3}{10} + 3\times\frac{1}{30} = 0{,}8.$$

Partie II : Etude d'une courbe paramétrée.

Soit (Γ) la courbe d'équation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = Cos^2 t \\ y(t) = Sin\, t \end{cases}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Position des points M (t) et M (- t).

   $x(-t) = Cos^2(-t) = Cos\, t = x(t)$; $y(-t) = Sin(-t) = -Sin\, t = -y(t)$.

   Alors les points M (t) et M (- t) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2. Pour tout réel t appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $-t$ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

   et de plus, les points M (t) et M (- t) sont symétriques par rapport à l'axe (Ox).

   On en déduit qu'on peut réduire l'étude de (Γ) sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et compéter le tracé de (Γ) par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

3. a) Variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

   - $x(0) = Cos^2 0 = 1$; $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

     Pour tous réel t de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $x'(t) = (Cos^2 t)' = -2\, Sin\, t\, Cos\, t$.

     On sait bien que, pour tout réel t de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $Cos\, t \geq 0$ et $Sin\, t \geq 0$;

     alors, pour tout réel t de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $x' \leq (t)\ 0$. La fonction $x(t)$ est décroissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

   - $y(0) = Sin(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = Sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

   - Pour tous réel t de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $y'(t) = (Sin\, t)' = Cos\, t \geq 0$; alors la fonction $y(t)$ est croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

   b) Tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	-	0
$y'(t)$	1	+	0
$x(t)$	1	↘	0
$y(t)$	0	↗	1

4. $t = \frac{\pi}{4}$, M a pour abscisse $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = Cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ et ordonnée $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = Sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   D'où $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Le vecteur tangent $\vec{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = x'\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + y'\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} = -\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

   La tangente (T) à (Γ) en ce point M, est la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{V}\left(\frac{\pi}{4}\right)$. D'où l'équation de la tangente (T) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

5. **Allure de la courbe (Γ).**